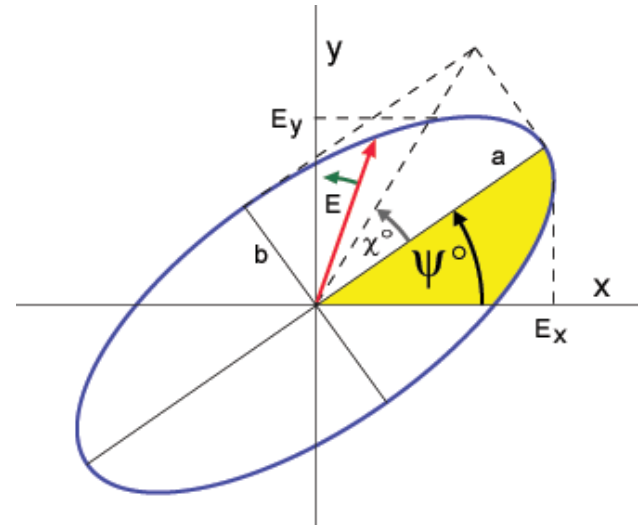


UTC604: Mathématiques pour l'ingénieur

J.SAAB

Ch 3: Système Différentiel Linéaire



Généralités:

Soient $y_i(x)$, $i = 1 \cdots n$ des fonctions réelles de la variable réelle x .

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{(x)}.$$

Pour tout $j = 1 \cdots n$, $f_j(t_1, \cdots, t_{n+1})$ est une fonction réelle de $n + 1$ variables réelles.

$$f(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\ f_2(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)) \end{pmatrix}$$

Un système différentiel de premier ordre en $Y(x)$ est de la forme

$$(S_n) : y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)), j = 1 \cdots n$$

Sous forme vectorielle

$$Y'(x) = f(x, Y(x))$$

Exemple:

$$\begin{cases} y_1'(x) = x^2 y_1(x) + e^{y_2(x)} \\ y_2'(x) = \ln(x + y_1(x)) \cdot y_2(x) \end{cases}$$

Le système est dit linéaire s'il s'écrit:

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

$$A \in M_n(C(I)), B \in M_{n,1}(C(I))$$

➔ Si $B = 0$, le système est dit linéaire et homogène.

➔ Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, le système est dit à coefficients constants.

Dans ce chapitre, on étudie les systèmes linéaires à coefficients constants:

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + B(x)$$

Système différentiel à coefficients constants



Système différentiel homogène $(S) : \frac{dY(t)}{dt} = AY(t) :$ Modèle $A \in M_3(\mathbb{R})$

1- Si A est diagonalisable on a $\{V_1, V_2, V_3\}$ une base propre de \mathbb{R}^3 associée aux v.p $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ de A .

La S.G de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3; Y_i = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot V_i$

En effet, montrons que $Y_i = V_i e^{\lambda_i \cdot t}$ est une solution de $(S) : \text{On a } AV_i = \lambda_i V_i \text{ et si } Y_i = V_i e^{\lambda_i \cdot t} \text{ alors}$

$$Y_i' = \lambda_i V_i e^{\lambda_i t} = AV_i e^{\lambda_i t} = AY_i$$

Donc Y_i vérifie (S) et c'est une solution de (S)

Comme A est diagonalisable alors les V_i sont indépendants et donc les Y_i sont indépendantes

par suite la S.G. de (S) est $Y = \sum C_i Y_i.$

2- Si A n'est pas diagonalisable: ceci est dû à une de deux raisons

■ Si $P_A(\lambda)$ n'est pas scindé on a λ_1 une v.p réelle et $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$ deux v.p complexes de A .

Soit V_1 et V_2 deux vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement.

$$Y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1, Y_2 = \operatorname{Re}(e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2), Y_3 = \operatorname{Im}(e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2)$$

La S.G. de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

■ Si $P_A(\lambda)$ est scindé mais $\dim E_{\lambda_i} \neq \operatorname{mult}(\lambda_i)$:

- Si on a λ_1 v.p simple et λ_2 v.p double avec $E_{\lambda_i} = \langle V_i \rangle, i = 1, 2$:

Soit V_3 tel que $(A - \lambda_2 I)V_3 = V_2$

$$Y_1 = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot V_1, Y_2 = e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot V_2, Y_3 = (V_2 \cdot t + V_3)e^{\lambda_2 \cdot t}.$$

La S.G de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

- Si on a λ est une v.p de A de multiplicité 3 alors on a deux cas:

► $E_\lambda = \langle V_1, V_2 \rangle$: Dans ce cas on considère V_3 tel que $(A - \lambda I)V_3 = V_2$

$$Y_1 = e^{\lambda_1.t} \cdot V_1, Y_2 = e^{\lambda_1.t} \cdot V_2, Y_3 = (V_2 \cdot t + V_3)e^{\lambda_2.t}.$$

La S.G de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

► $E_\lambda = \langle V_1 \rangle$: Dans ce cas on considère V_2 tel que $(A - \lambda I)V_2 = V_1$

on prend V_3 tel que $(A - \lambda I)V_3 = V_2$

$$Y_1 = e^{\lambda.t} \cdot V_1, Y_2 = e^{\lambda.t} \cdot (V_1 \cdot t + V_2), Y_3 = (V_1 \cdot \frac{t^2}{2} + V_2 \cdot t + V_3)e^{\lambda.t}$$

La S.G de (S) est $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$.

Exemple:

$$\text{Résoudre le système: } \begin{cases} x'(t) = x - 2y \\ y'(t) = x + 4y \end{cases}$$

$$\text{Soit } Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Les v.p. de A sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$. La matrice A est diagonalisable.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sont 2 } \overrightarrow{\text{v.p.}} \text{ associés à } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ resp.}$$

$$Y_1 = V_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}; Y_2 = V_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \text{ sont 2 S.P. indépendantes de } (S).$$

La S.G. de (S) est $Y = L.C$

$$L = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{2t} \\ -e^{3t} & -e^{2t} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ soit } Y = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^{3t} - c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

c.à.d

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \\ y = -c_1 e^{3t} - c_2 e^{2t} \end{cases}$$

Exponentielle d'une matrice carrée

Exponentielle de $A \in M_n$:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{t^n}{n!}$$

Propriétés:

$$\exp(O) = I$$

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A) P$$

$$e^{A+B} = e^A e^B, \text{ si } AB = BA$$

Solution du système homogène $Y' = AY$

En effet, $Y = e^{At}$ donc $Y' = Ae^{At} = AY$

Application:

$$e^{At} = \sum_{n \geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}$$

si par exemple A est nilpotente de degré 3 ($A^3 = 0$):

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2 t^2.$$

Systeme différentiel non homogène

$$(S) : Y'(t) = A.Y(t) + B(t)$$

La S.G. de (S) est $Y = Y_g + Y_p$

Y_g est la S.G. de l'ESSM associée à (S) c.à.d. $Y' = AY$

Y_p est une S.P. de (S)

Théorème: Si $Y_g = L.C$ alors $Y_p = L. \left(\int L^{-1} B dt \right)$

Exemple Résoudre le système:
$$\begin{cases} x'(t) = x - 2y + e^t \\ y'(t) = x + 4y + e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y' = AY + B$$

On a montré que la S.G. de $(S_0) : Y' = AY$ est $Y_g = L.C$

$$L = \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{2t} \\ -e^{3t} & -e^{2t} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$Y_p = LU$ avec $U_{(t)} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ est une S.P. de (S) alors $LU' = B$

$$\begin{cases} u' e^{3t} + 2v' e^{2t} = e^t \\ -u' e^{3t} - v' e^{2t} = e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' e^{3t} + 2v' e^{2t} = e^t \\ -u' e^{3t} - v' e^{2t} = e^{2t} \end{cases}$$

On trouve

$$v'(t) = e^{-t} + 1 \text{ donc } v(t) = -e^{-t} + t$$

$$u'(t) = e^{-2t} - 2e^{-t} \text{ donc } u = 2e^{-t}(1 - e^{-t})$$

$$\text{donc } U = \begin{pmatrix} 2e^{-t}(1 - e^{-t}) \\ e^{-t} + t \end{pmatrix}$$

$$Y_p = LU = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La S.G de (S) est $Y = Y_g + Y_p$, soit

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} + 1 \\ y = -c_1 e^{3t} - c_2 e^{2t} + 1 \end{cases}$$

Fin